

Déterminant de Gram et Application

THÉORÈME : Soit E un espace préhilbertien et V un sous espace vectoriel de E muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ (pas forcément orthonormale). Soit $x \in E$. Alors la distance de x à V vérifie :

$$d(x, V)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

On a $d(x, V) = \inf_{y \in V} \|x - y\| = \|x - p(x)\|$ où p est la projection orthogonale sur V .

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a : $\langle e_i, x \rangle = \langle e_i, x - p(x) \rangle + \langle e_i, p(x) \rangle = \langle e_i, p(x) \rangle$ car $x - p(x) \in V^\perp$ et $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$. Si on note M la matrice de Gram de $e_1, \dots, e_n, x$ on a :

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \dots & \langle e_1, e_n \rangle & \langle e_1, x \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle e_n, e_n \rangle & \langle e_n, x \rangle \\ \hline \langle x, e_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle x, e_n \rangle & \langle x, x \rangle \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \dots & \langle e_1, e_n \rangle & \langle e_1, p(x) \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle e_n, e_n \rangle & \langle e_n, p(x) \rangle \\ \hline \langle p(x), e_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle p(x), e_n \rangle & \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \end{array} \right)$$

La linéarité de $\det(M)$ par rapport à la dernière colonne entraîne que $\det(M) = \det(P) + \det(Q)$

où

$$P = \left(\begin{array}{ccccc|c} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \dots & \langle e_1, e_n \rangle & \langle e_1, p(x) \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle e_n, e_n \rangle & \langle e_n, p(x) \rangle \\ \hline \langle p(x), e_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle p(x), e_n \rangle & \|p(x)\|^2 \end{array} \right) \text{ et } Q = \left(\begin{array}{ccccc|c} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \dots & \langle e_1, e_n \rangle & 0 \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle e_n, e_n \rangle & 0 \\ \hline \langle p(x), e_1 \rangle & \dots & \dots & \dots & \langle p(x), e_n \rangle & \|x - p(x)\|^2 \end{array} \right)$$

Or : $\det(P) = G(e_1, \dots, e_n, p(x)) = 0$ car $p(x) \in Vect(e_1, \dots, e_n)$

$$\det(Q) = \|x - p(x)\|^2 G(e_1, \dots, e_n) = d(x, V)^2 G(e_1, \dots, e_n).$$

$$\det(M) = G(e_1, \dots, e_n, x).$$

D'où

$$d(x, V)^2 = \frac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$$

APPLICATION :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $(a_1, \dots, a_n) \mapsto \int_0^1 (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)^2 dx$. Montrer que φ admet un minimum μ , atteint en un unique point de $\mathbb{R}^n$ et $\mu = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Munissons le $\mathbb{R}$ -ev $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Pour tout entier i , on désigne par x^i la fonction $x \mapsto x^i$. En notant $E_n = Vect(x, \dots, x^n)$, on remarque que : $\varphi(a_1, \dots, a_n) = \int_0^1 (1 + \sum_{i=1}^n a_i x^i)^2 dx$, donc si on note

$P = - \sum_{i=1}^n (a_i x^i)$, on obtient $\varphi(a_1, \dots, a_n) = \int_0^1 (1 - P)^2 dx = \|1 - P\|^2$. On cherche à déterminer $\mu = \inf_{a \in \mathbb{R}^n} \varphi(a) = \inf_{P \in E_n} \|1 - P\|^2 = d(1, E_n)^2$. Comme E_n est un sous espace vectoriel, il existe un unique $P_0 \in E_n$ tel que $d(1, E_n)^2 = \|1 - P_0\|^2 = \mu$ (P_0 étant la projection orthogonale de 1 sur E_n). On a donc montré que φ admet un minimum μ atteint en un point unique de $\mathbb{R}^n$. De plus, par le théorème précédent, on a : $\mu = \frac{G(1, \dots, x^n)}{G(x, \dots, x^n)}$. Comme pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\langle x^i, x^j \rangle = \frac{1}{i+j+1}$, on a $G(x, \dots, x^n) = \det((\frac{1}{i+j+1}))_{1 \leq i, j \leq n}$. Pour la matrice de Gram des $1, \dots, x^n$, on remarque que ses valeurs sont les mêmes que la précédente mais avec une indexation décalée : $M_{ij} = \langle x^{i-1}, x^{j-1} \rangle$ d'où $G(1, x, \dots, x^n) = \det((\frac{1}{i+j-1}))_{1 \leq i, j \leq n}$.

Ces déterminants sont des déterminants de Cauchy donc on sait les calculer grâce à la formule suivante : $\Delta_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (a_i + b_j)}$. Ainsi :

$$G(1, x, \dots, x^n) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (j - i)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (i + j - 1)} \quad \text{et} \quad G(x, \dots, x^n) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (i + j + 1)}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{G(1, x, \dots, x^n)}{G(x, \dots, x^n)} = \frac{\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (j - i)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (i + j - 1)}}{\frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)^2}{\prod_{1 \leq i, j \leq n} (i + j + 1)}} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (j - i)^2 \prod_{1 \leq i, j \leq n} (i + j + 1)}{\prod_{1 \leq i, j \leq n+1} (i + j - 1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)^2} \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i \leq n} (n + 1 - i)^2 \prod_{1 \leq i, j \leq n} (i + j + 1)}{\prod_{0 \leq i, j \leq n} (i + j + 1)} = \frac{\prod_{1 \leq i \leq n} (n + 1 - i)^2}{(n + 1)!^2} = \frac{(n + 1)!^2}{(n + 1)^2 (n + 1)!^2} = \frac{1}{(n + 1)^2} \end{aligned}$$